5. МАГНИТОСТАТИКА

Уравнения электромагнитного поля для поля постоянных токов имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{5.1}$$

Если ввести векторный потенциал $\mathbf{A}$: $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ и использовать условие калибровки $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, то получаем

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \qquad \text{при} \qquad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{5.2}$$

Основная задача магнитостатики состоит в нахождении магнитного поля по заданному распределению токов (прямая задача) и в отыскании распределения токов, создающего заданное поле (обратная задача). С помощью функции Грина для соответствующей задачи решение прямой задачи магнитостатики может быть представлено в виде интегралов, аналогично решению прямой задачи электростатики. В частности, для пространственно ограниченного распределения токов, находящихся в безграничном пространстве, векторный потенциал дается формулой

$$\mathbf{A}(r) = \frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'. \tag{5.3}$$

Напряженность магнитного поля тогда описывается выражением

$$\mathbf{H}(r) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(r) = \frac{1}{c}\int\frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\mathbf{r}'. \tag{5.4}$$

Решение обратной задачи магнитостатики дается равенством

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{c}{4\pi}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{5.5}$$

Здесь, как и в электростатике, нужно быть осторожным при вычислении оператора Лапласа от $\mathbf{A}(\mathbf{r})$: векторный потенциал может иметь особенности вдоль некоторых линий; вдоль этих линий текут линейные токи.

На границе раздела двух сред должно выполняться условие для тангенциальных компонент напряженности магнитного поля

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} j_S, \tag{5.6}$$

где j_S – поверхностная плотность тока.

Задачи

5.1. В безграничном пространстве находится ограниченная система токов. Найти магнитное поле на расстояниях, больших по сравнению с размерами области, занятой токами.

Решение. В данном случае векторный потенциал постоянного магнитного поля определяется формулой (5.3), в которой интегрирование идет по области, занятой токами. Для поля на больших расстояниях будет выполняться $|\mathbf{r}'| << |\mathbf{r}|$. Тогда, используя разложение

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - (\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r} + \Lambda = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^3} + \Lambda ,$$

получаем

$$\mathbf{A}(r) = \frac{1}{cr}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' + \frac{1}{cr^3}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' + \Lambda .$$

Первый из выписанных интегралов обращается в нуль, так как токи текут внутри нашего объема и никуда из него не выходят.

Второй интеграл перепишем в следующем виде:

$$\int d\mathbf{r}'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \int d\mathbf{r}'\left(\mathbf{r}'(\mathbf{r}\mathbf{j}) - [\mathbf{r}\times[\mathbf{r}'\times\mathbf{j}]]\right).$$

Первое слагаемое в правой части равно с обратным знаком левой части этого равенства:

$$\mathbf{J}_2 \equiv \int d\mathbf{r}'\,\mathbf{r}'(\mathbf{r}\mathbf{j}(\mathbf{r}')) = -\int d\mathbf{r}'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}\mathbf{r}') \equiv -\mathbf{J}_1.$$

Для доказательства этого заметим, что интегралы $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ можно записать в виде

$$J_1^{\alpha} = r_\beta \int d\mathbf{r}'\, r'_\beta\, j_\alpha(\mathbf{r}') = r_\beta\, J_{\beta\alpha},$$
$$J_2^{\alpha} = r_\beta \int d\mathbf{r}'\, r'_\alpha\, j_\beta(\mathbf{r}') = r_\beta\, J_{\alpha\beta},$$

где

$$J_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{r}'\, r'_\alpha\, j_\beta(\mathbf{r}').$$

Таким образом нужно доказать, что $J_{\alpha\beta} = -J_{\beta\alpha}$. Поскольку в нашем случае ($\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, так как $\mathbf{j} = (c/4\pi)\operatorname{rot}\mathbf{H}$)

$$\operatorname{div}\left(r'_\alpha \mathbf{j}(\mathbf{r}')\right) = r'_\alpha \operatorname{div}\mathbf{j} + \left(\mathbf{j}\nabla_{\mathbf{r}'}\right) r'_\alpha = j_\beta \frac{\partial}{\partial r'_\beta} r'_\alpha = j_\alpha,$$

то $J_{\alpha\beta}$ можно переписать в виде

$$J_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{r}'\, r'_\alpha\, j_\beta(\mathbf{r}') = \int d\mathbf{r}'\, r'_\alpha \operatorname{div}\left(r'_\beta \mathbf{j}(\mathbf{r}')\right).$$

Далее, поскольку

$$\operatorname{div}\left(r'_\beta r'_\alpha \mathbf{j}\right) = r'_\alpha \operatorname{div}\left(r'_\beta \mathbf{j}\right) + \left(r'_\beta \mathbf{j}\nabla\right) r'_\alpha = r'_\alpha \operatorname{div}\left(r'_\beta \mathbf{j}\right) + r'_\beta\, j_\alpha,$$

то

$$J_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{r}' \operatorname{div}\left(r'_\alpha r'_\beta \mathbf{j}\right) - \int d\mathbf{r}'\, r'_\beta\, j_\alpha.$$

Интеграл от дивергенции равен нулю, так как он преобразуется в поверхностный интеграл, а эта поверхность всегда может быть выбрана вне объема, занятого токами. Второй же интеграл равен $J_{\beta\alpha}$, тем самым нужное нам равенство доказано.

С учетом этого получаем

$$\mathbf{J}_1 \equiv \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \int d\mathbf{r}'\, \mathbf{r}'(\mathbf{r}\mathbf{j}) - \int d\mathbf{r}' [\mathbf{r} \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}]] =$$
$$- \mathbf{J}_1 - \left[\mathbf{r} \times \int d\mathbf{r}' [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}]\right],$$

откуда находим

$$\mathbf{J}_1 = -\left[\mathbf{r} \times \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}]\right].$$

Поскольку

$$\frac{1}{2c}\int d\mathbf{r}'[\mathbf{r}'\times\mathbf{j}]=\mathbf{M}$$

есть магнитный момент системы, то для векторного потенциала на больших расстояниях получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})\approx\frac{[\mathbf{M}\times\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Напряженность магнитного поля при этом дается выражением

$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}=\left[\nabla\times\frac{[\mathbf{M}\times\mathbf{r}]}{r^3}\right]=\mathbf{M}\left(\nabla\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)-(\mathbf{M}\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

которое после вычисления входящих в него величин

$$\nabla\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\mathbf{r}\nabla\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}(\nabla\mathbf{r})=-\frac{3r^2}{r^5}+\frac{3}{r^3}=0,$$

$$(\mathbf{M}\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\frac{1}{r^3}(\mathbf{M}\nabla)\mathbf{r}+\mathbf{r}(\mathbf{M}\nabla)\frac{1}{r^3}=\frac{\mathbf{M}}{r^3}-\mathbf{r}\left(\mathbf{M}\frac{3\mathbf{r}}{r^5}\right)=$$

$$=\frac{\mathbf{M}-3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{M})}{r^3}$$

принимает вид

$$\mathbf{H}=\frac{-\mathbf{M}+3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{M})}{r^3},\qquad \mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Таким образом, на больших расстояниях от системы токов поле определяется, прежде всего, магнитным дипольным моментом системы. Учет следующих членов в разложении $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ приводит к высшим мультипольным вкладам в $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

5.2. Показать, что в точках пространства, где отсутствуют токи, можно ввести скалярный потенциал магнитного поля. Найти скалярный потенциал магнитного поля прямолинейного тока [10, № 254, 11, № 152, 153].

Решение. В точках, где $\mathbf{j} = 0$, уравнения магнитостатики сводятся к

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0.$$

Из первого из этих равенств следует, что $\mathbf{H}$ можно представить в виде градиента некоторой функции – скалярного потенциала магнитного поля: $\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получим

$$\Delta\psi = 0,$$

то есть скалярный потенциал магнитного поля ψ удовлетворяет уравнению Лапласа. Среди решений этого уравнения нужно выбрать такие, чтобы выполнялись уравнения магнитостатики, в частности уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{H} = (4\pi / c)\mathbf{j}$. Проинтегрируем это уравнение по поверхности, опирающейся на контур, проходящий через рассматриваемую нами точку и охватывающий токи, создающие магнитное поле:

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{H}\,\mathbf{dS} = \oint_{L_S} \mathbf{H}\,\mathbf{dl} = -\oint_{L_S} \operatorname{grad}\psi\,\mathbf{dl} =$$

$$= -\oint_{L_S} \frac{\partial\psi}{\partial l}\,dl = -(\psi_2 - \psi_1) = \frac{4\pi}{c}J.$$

Здесь $\psi_2 - \psi_1$ – изменение ψ при обходе по контуру, охватывающему ток J, создающий поле.

Таким образом, в точках пространства, где отсутствуют токи, можно ввести скалярный потенциал магнитного поля, удовлетворяющий уравнению Лапласа и дополнительному условию

$$\Delta\psi = 0, \quad \psi_2 - \psi_1 = -\frac{4\pi}{c}J.$$

Определим скалярный потенциал прямолинейного тока. Вследствие аксиальной симметрии задачи имеем (в цилиндрических координатах)

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = 0,$$

$$\psi(r,\phi + 2\pi) - \psi(r,\phi) = -\frac{4\pi}{c} J.$$

Так как правая часть последнего равенства не зависит от r, то $\psi(r,\phi) = \psi(\phi)$. Тогда из первого уравнения имеем

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \psi(\phi) = C_1\phi + C_2.$$

Потенциал ψ определен с точностью до постоянной. Поэтому можно положить $C_2 = 0$. C_1 выбираем из дополнительного условия

$$\psi(\phi + 2\pi) - \psi(\phi) = C_1(\phi + 2\pi) - C_1\phi = 2\pi C_1 = -\frac{4\pi}{c} J.$$

Окончательно получаем

$$\psi(\phi) = -\frac{2J}{c}\phi.$$

Магнитное поле, найденное по этому потенциалу:

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi = \mathbf{e}_{\phi}\frac{2J}{rc},$$

совпадает с известным результатом.

Задачи для самостоятельного решения

[11] – № 178, 142, 221.